



TITLE:

# 円盤形放射状液体シート上の非線形挙動(波動現象の数理と応用)

AUTHOR(S):

佐野, 雅之; 船越, 満明

---

CITATION:

佐野, 雅之 ...[et al]. 円盤形放射状液体シート上の非線形挙動(波動現象の数理と応用). 数理解析研究所講究録 2007, 1543: 1-8

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80721>

RIGHT:

## 円盤形放射状液体シート上の非線形挙動

京大・情報学

佐野 雅之 (Masayuki Sano)

京大・情報学

船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems  
Graduate School of Informatics, Kyoto University

### 1 序

液体シートの流れは 2 次元平面状, 円環形シート, 円盤状に流れる放射状シートがある。これらは工学的に重要なだけでなく理論的にも興味深い対象として研究が行われてきた。その中でも液体が円盤状に拡がる放射状液体シートは, 2 つの液体ジェットが衝突したときなどに生じ古くから注目されてきた。円盤状液体シートの特徴としては, 液体の動径方向速度が円盤中心からの距離によらず一定であること, したがって厚さが円盤中心からの距離に反比例すること, またシートの拡がる半径に限界があることなどが知られている [1, 2]。

シートに生じる波に関しては 2 次元平面シートや円環形シートの場合と同様に反対称モードと対称モードが存在し外部流体の効果があるときには長波長の擾乱に対して不安定となるが, 外部流体の効果がないときには中立安定となることが線形解析によって調べられている [3]。

近年, 2 次元平面シートもしくは円環形シートに対して薄膜近似と呼ばれる手法を用いての研究が多くされている。これは, 液体シートの厚さ方向のスケールが流れ方向に生じる波の波長のスケールよりも小さいことに着目し, 厚さ方向の自由度を積分することによって液体シートのモデル方程式を導く手法である。これによって種々の液体シートの挙動の非線形効果が調べられてきている [4, 5, 6, 7]。

シートを伝播する波動の伝播速度は平面シートの線形理論の結果によればシート厚さに依存し, 円盤形シートに局所一様近似として平面シートの線形理論の結果を適用した解析が行われてきた [1]。しかし円盤形シートの基本流での厚さの変化を考慮した場合での局所一様近似の正しさについては今まで調べられていなかった。ここでは波動の伝播速度を数値的に解析し, 非線形効果による局所一様近似からのずれを調べる。

### 2 薄膜近似による定式化

円盤状に拡がる軸対称な液体シートを考える。流体は非粘性非圧縮とする。またここでは外部流体の効果を無視する。流体の密度を  $\rho$  とし, 表面張力係数を  $\sigma$  とおく。円柱座標系をとり図 1 のように  $r, z$  方向の速度を  $u, v$  とし, シート内の圧力を  $p$  シートの上下の表面を  $z = z_{\pm}$  で表す。基礎方程式は連続の式と Euler 方程式である。これをシートの厚さ方向に  $z = z_-$  から  $z = z_+$  まで積分して平均化する。

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) dz + \int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0, \quad (1)$$

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{z_-}^{z_+} u \frac{\partial u}{\partial r} dz + \int_{z_-}^{z_+} v \frac{\partial u}{\partial z} dz = - \int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} dz, \quad (2)$$

$$\int_{z_-}^{z_+} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \int_{z_-}^{z_+} u \frac{\partial v}{\partial r} dz + \int_{z_-}^{z_+} v \frac{\partial v}{\partial z} dz = - \int_{z_-}^{z_+} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (3)$$

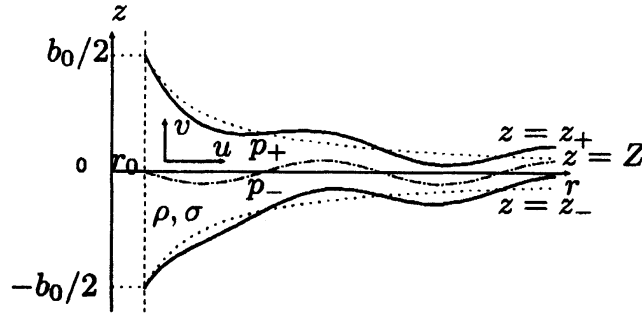


図 1: 円盤形放射状液体シートの概念図

境界条件は上下界面での運動学的境界条件

$$v = \frac{\partial z_{\pm}}{\partial t} + u \frac{\partial z_{\pm}}{\partial r} \quad \text{at } z = z_{\pm} \quad (4)$$

と力学的境界条件

$$p_{\pm} = \mp \sigma \left( \frac{\frac{\partial^2 z_{\pm}}{\partial r^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial z_{\pm}}{\partial r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\partial z_{\pm}}{\partial r}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_{\pm}}{\partial r}\right)^2}} \right) \quad \text{at } z = z_{\pm} \quad (5)$$

である。

ここで  $z$  方向のシートの厚さ方向の変化のスケールが  $r$  方向に生じる波の波長よりもずっと小さいとして薄膜近似の考え方を適用する [4, 5, 6, 7]。ここでは  $u, v, p$  の  $z$  依存性について  $u, \partial v / \partial z, \partial p / \partial z$  が  $z$  についてほとんど変化しないと仮定し定数とおく。このように  $u, v, p$  の  $z$  依存性を近似することで (1), (2), (3) の積分を実行することができる。

以下では各変数を代表的長さを噴出口の半径  $r_0$  と噴出口でのシート流の速度  $U_0$  を用いて無次元化する。また Weber 数  $We$  を  $We = \rho U_0^2 b_0 / \sigma$  で定義する。

積分を実行し、さらに Leibnitz 則を用いると (6) と (7) は  $\bar{u}$  と  $\bar{v}$  に対する時間発展方程式として

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{We} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\Delta p}{b} \frac{\partial Z}{\partial r} \right), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{1}{We} \frac{\Delta p}{b}, \quad (7)$$

が得られる。ここで  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$  は  $b = z_+ - z_-$  をシートの厚さとして

$$\bar{u} = \frac{1}{b} \int_{z_-}^{z_+} u dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{b} \int_{z_-}^{z_+} v dz, \quad \bar{p} = \frac{1}{b} \int_{z_-}^{z_+} p dz \quad (8)$$

で表される厚さ方向の平均量である。また  $\Delta p = p_+ - p_-$  はシート内部の  $z$  方向のシートの上下界面の圧力  $p_{\pm}$  の差で (5) より計算される。(4) について  $z = z_{\pm}$  に対応する 2 つの式の和を取ると  $Z$  の時間発展方程式として

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \bar{v} - \bar{u} \frac{\partial Z}{\partial r}, \quad (9)$$

となり、差を取って (1) を用いて変形すると  $b$  の時間発展方程式として

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r \bar{u} b)}{\partial r}, \quad (10)$$

を得る。この (6),(7),(9),(10) が軸対称放射状シートの時間発展を記述する方程式となる。

この軸対称放射状シートの定常流を考えるために、モデル方程式の定常解を考える。(6),(7),(9),(10) で時間微分項を 0 として

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}b) = 0, \quad (11)$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{We}\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial r} - \frac{\Delta p}{b}\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = 0, \quad (12)$$

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial r} + \frac{1}{We}\frac{\Delta p}{b} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{v} - \bar{u}\frac{\partial Z}{\partial r} = 0. \quad (14)$$

ここで解として  $r$  軸に関して対称なもの考えることにすると

$$Z = 0 \quad (15)$$

なので (14) に代入して

$$\bar{v} = 0 \quad (16)$$

となる。ここで  $z_{\pm} = \pm b/2$  より  $\Delta p = 0$  であるので、(15),(16) は (13) をみたとす。さらに (11) より  $Q$  を定数として

$$u = \frac{Q}{rb} \quad (17)$$

となる。この  $Q$  はシート内の流体の流量に対応する量である。これらを (12) に代入し (5) も用いると定常解の  $b$  の満たす方程式は

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{Q^2}{r^2b^2}\right) + \frac{1}{2We}\left(\frac{\frac{\partial^2 b}{\partial r^2}}{\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\partial b}{\partial r}}{r\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)^2}}\right) = 0 \quad (18)$$

となる。

$We$  が大きく表面張力項を無視するような場合  $We \rightarrow \infty$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ) となるが、このとき (18) の第 2 項が無視されるために近似解は  $b = Q/r$ ,  $u = 1$  の形となり、これは実験的に報告されている結果 [2] と一致する。

この得られた方程式 (18) の解を数値的に求めた。数値計算法としては 4 次の Runge-Kutta 法を用い  $r$  軸の 1 点で  $b$  及び  $\partial b/\partial r$  の値を与えて刻み幅  $\Delta r = 0.001$  として積分した。ここでは  $r \rightarrow \infty$  で  $b = Q/r$  と近似される解を考える。図 (2) は、 $Q = 50$  として  $r = 1200$  において  $b = 50/1200$  かつ  $\frac{\partial b}{\partial r} = -50/(1200)^2$  となるようにして  $50 \leq r \leq 1200$  の範囲で求めた数値解と近似解  $b = 50/r$  を  $We$  の値が 5, 50, 500 の各場合に比較したものである。シートの厚さ  $b$  に関しては同じ  $r$  の値に対して定常解の数値解と近似解  $b = Q/r$  との差は  $We$  が小さくなるにつれて大きくなる。しかし差が大きい  $We = 5$  場合の  $r = 50$  付近でも、その差は  $10^{-6}$  程度であり近似解  $b = 50/r$  がよい近似となっていることがわかる。また  $We = 500$  の場合より、 $We$  が大きい場合は噴出口近くでも近似解  $b = 50/r$  との差はとても小さなものになっている。 $r$  方向速度  $u$  に関しても  $u = \frac{Q}{rb}$  よりわかるように近似解  $u = 1$  との差は  $We$  が小さくなるにつれて大きくなる。その差の大きさは  $We = 5$  の場合でも  $r = 50$  で  $10^{-5}$  程度と小さい。

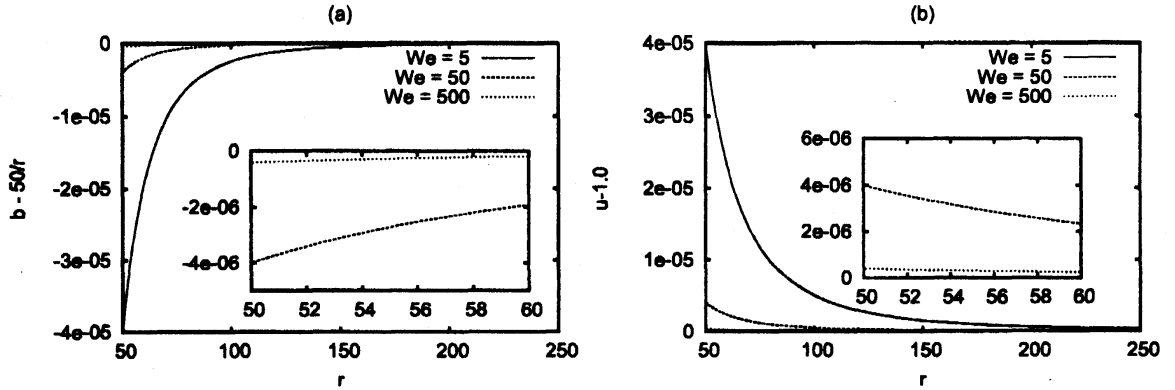


図 2:  $We = 5, 50, 500$ .  $Q = 50$  に対する定常解の数値解: (a) 厚さ  $b$  と近似解  $b = 50/r$  の差, (b)  $r$  方向速度  $u$  と近似解  $u = 1$  の差

### 3 円盤形放射状シートの時間発展の数値計算と波動の伝播速度の解析

2次元平面シートの場合の線形解析より, 反対称モードの波に対する分散関係式は

$$(\omega - k)^2 - \frac{2}{We} k^2 = 0 \quad (19)$$

となる [8]。これより位相速度は

$$\frac{\omega}{k} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{We}} \quad (20)$$

となる。Weber 数  $We$  は平面シートでは定数であるが円盤形シートではシートの厚さが  $r$  によって変化し,  $b_0$  を  $r = r_0$  での値  $Q/r_0$  とすると, シート厚さは  $b(r) = Q/r = b_0 r_0 / r$  と書ける。この厚さ  $b(r)$  を用いて局所 Weber 数を  $We(r) = \rho U b(r) / \sigma$  と定義すると,  $We(r)$  は  $We_0$  を境界  $r = r_0$  で定義された Weber 数として

$$We(r) = \frac{Q We_0}{b_0 r} \quad (21)$$

と表せる。これより局所的に一樣と近似した場合の反対称モードの波動の伝播速度  $c_p$  は

$$c_p = \frac{\omega}{k} = 1 + C\sqrt{r}, \quad C = \pm \sqrt{\frac{2}{Q We_0}}, \quad b_0 = 1 \quad (22)$$

となる。

反対称モードの波動の伝播が非線形効果によって影響を受ければ, この局所一樣近似からのずれが生じると考えられる。この効果を調べるために, 薄膜近似によって得られたモデル方程式 (6),(7),(9),(10) を用いて, 円盤形シートの流入口にパルス状の反対称擾乱を加えて生じたパルスの伝播を数値的に調べた。数値計算法としては空間方向は 2 次の中心差分で離散化し, 時間方向は 4 次の Runge-Kutta 法を用いて積分した。空間方向の刻み幅  $\Delta x$  は 0.005, 時間方向のステップ幅  $\Delta t$  は 0.001 としている。擾乱はシートの境界での時間周期的な強制振動で, 反対称モードの擾乱をシート境界に半周期だけ加えるように, 次のように  $v$  に与える形で

$$b = b_0, \quad u = U_0, \quad v = A \sin(2\pi/T), \quad z = 0 \quad (23)$$

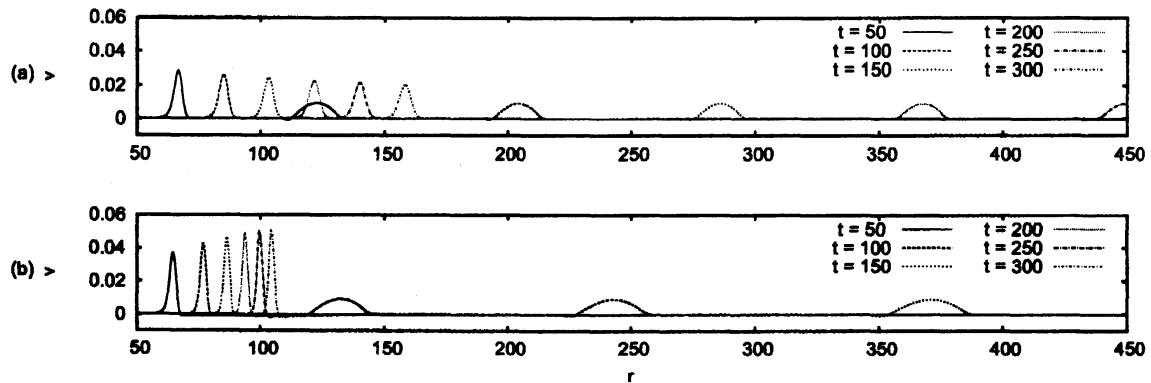


図 3:  $r$  方向速度  $v$  の時間発展 ( $We = 5, Q = 50, T = 25, A = 0.05$ ): (a) 平面シート, (b) 円盤形シート

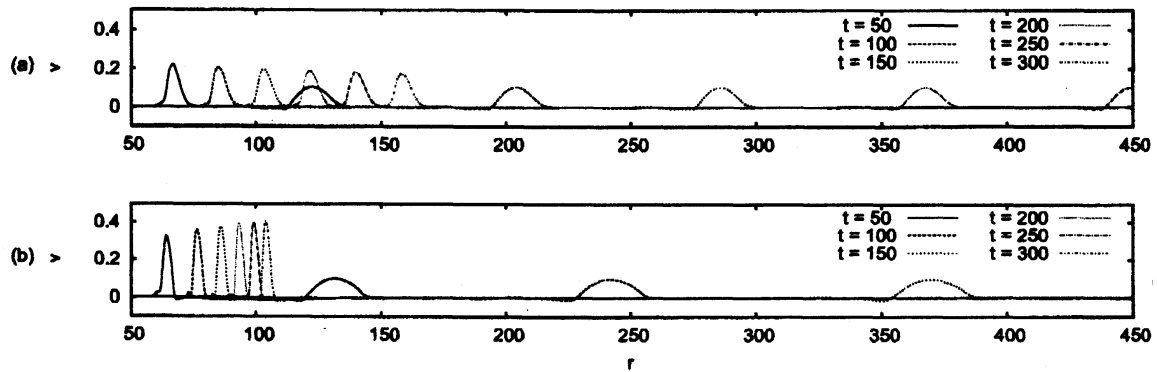


図 4:  $r$  方向速度  $v$  の時間発展 ( $We = 5, Q = 50, T = 25, A = 0.5$ ): (a) 平面シート, (b) 円盤形シート

とした。ここで  $b_0, U_0$  は定常流における  $r = r_0$  でのシート厚さとシート流速の値である。 $U_0$  は  $Q$  と  $b_0$  が与えられると (17) で求められる。また、 $A, T$  は擾乱の振幅と周期であり、ここでのパラメータでは定常解において  $u$  がほぼ 1 であるので発生する擾乱の 2 種類の波長の平均は平面シートにおいては周期と一致する。すなわち擾乱の周期は発生する擾乱の波長のスケールを表しているといえる。

図 3 は  $We = 5$  の場合に軸方向の速度  $v$  に与えた周期  $T = 25$  のパルス状擾乱の伝播の様子を、円盤形シートの場合と平面シートの場合に示したものである。その他のパラメータは  $Q = 50, A = 0.05$  としている。伝播速度の式 22 より境界  $r = r_0$  で固定された振動を与えると、2 種類の波数の擾乱がそれぞれ異なる位相速度で下流へ伝播していくことになる。図 3 ではこの二種類の擾乱が 2 個のピークとして見えている。平面シートの場合にはこのパルス部分の伝播速度が変化していないのに対して、円盤形シートの場合では 2 種類の波数の擾乱は、位相速度が大きい方の擾乱は波が  $r$  方向に伝播していくに従って、次第に速度が早くなって間隔が広がり、位相速度が小さい方の擾乱は次第に速度が遅くなって間隔が狭くなって行く様子がわかる。局所一様近似 (22) によると 2 種類の波数のうち、位相速度が小さい方の波は  $r = 1/C^2 = 125$  で伝播速度が 0 となるが、図 3 でも  $r = 1/C^2 = 125$  に近くなると伝播速度が遅くなる様子がわかる。振幅に関しては平面シート

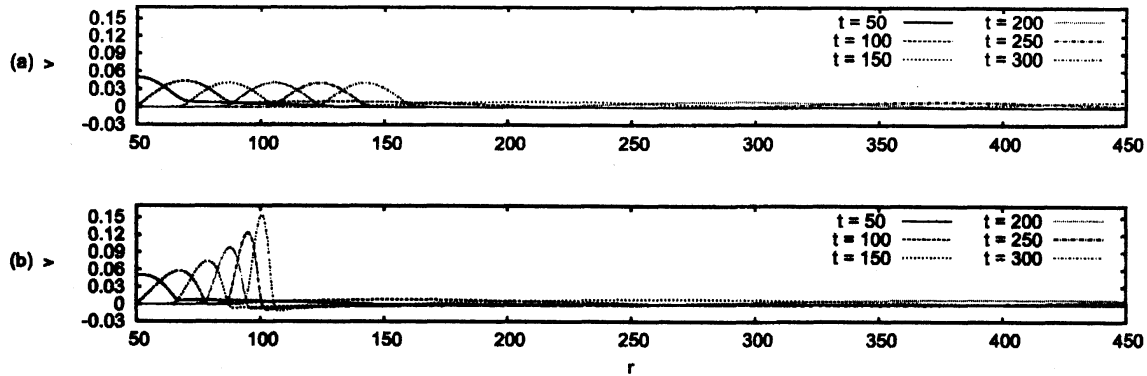


図 5:  $r$  方向速度  $v$  の時間発展 ( $We = 5, Q = 50, T = 200, A = 0.05$ ): (a) 平面シート, (b) 円盤形シート

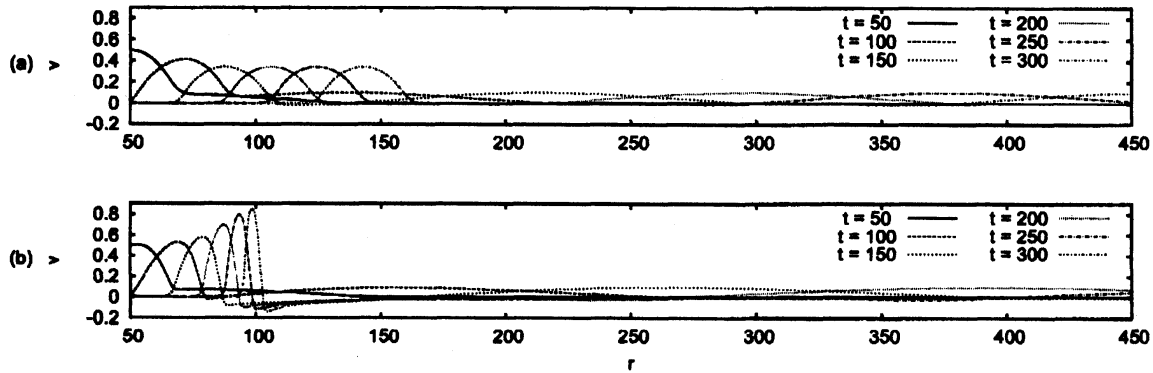


図 6:  $r$  方向速度  $v$  の時間発展 ( $We = 5, Q = 50, T = 200, A = 0.5$ ): (a) 平面シート, (b) 円盤形シート

の場合では伝播速度の小さい波が振幅がやや減少し、伝播速度の大きい波ではあまり変化していないのに対して、円盤形シートでは伝播速度の小さい波が振幅が次第に大きくなっていくという特徴がある。平面シートの場合での振幅の減少は数値粘性によるという可能性があるが、円盤形シートにおける振幅の増大は円盤形シートの特徴と考えられる。

図 4 は図 3 に対して振幅を 10 倍にし  $A = 0.5$  とした場合のパルス状擾乱の伝播の様子を示している。この場合でも、各時間における波形は  $A = 0.05$  の場合に比べて大きな変化は見せていない。しかし、各ピークの  $r$  の小さい側で  $v$  の値が 0 を下回る領域があるが、この部分の範囲と  $v$  の値の 0 からの変化に関しては  $A = 0.5$  のときの方が大きくなっている。このことは円盤形シートに顕著であり、平面シートでは  $A = 0.05$  ではこのような領域は見られず、 $A = 0.5$  で小さな領域が見られるようになっている。その他に、ピーク波形の最大値に対しての左右対称性も  $A = 0.5$  の方が非対称性が大きいといえる。

図 5 は図 3 に対して擾乱の周期を 8 倍にし  $T = 200$  とした場合のパルス状擾乱の伝播の様子を示している。擾乱の周期を 8 倍にすることで生じる擾乱の波長も 8 倍になる。このときは平面シートでは伝播に伴ってピークの幅があまり変化していないが、円盤形シートでは特に伝播速度の小さ

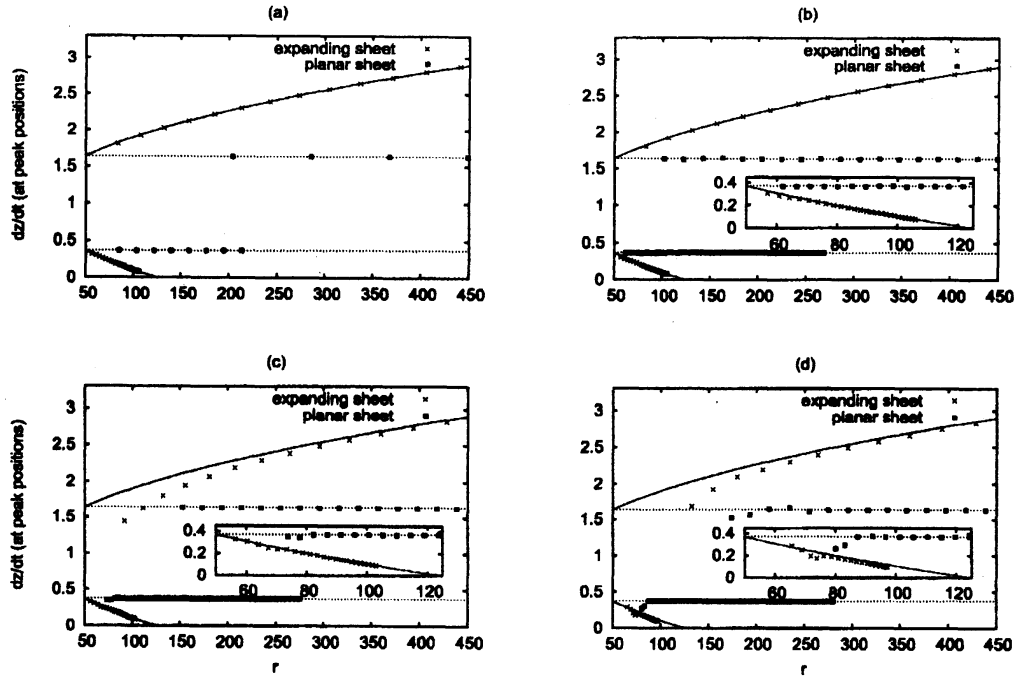


図 7: パルス状擾乱の伝播速度の位置依存性 (a)  $We = 5, Q = 50, T = 25, A = 0.05$  (b)  $We = 5, Q = 50, T = 25, A = 0.5$  (c)  $We = 5, Q = 50, T = 200, A = 0.05$  (d)  $We = 5, Q = 50, T = 200, A = 0.5$

い波数のピークの幅が減少し、振幅が増大している。図 6 は図 5 に対してさらに振幅を 10 倍にし  $T = 200$  かつ  $A = 0.5$  とした場合のパルス状擾乱の伝播の様子を示している。ここでは図 5 と比較すると傾向に変化は見られない。

次に、平均伝播速度の位置依存性の局所一様近似からのずれの有無を調べるために、擾乱のピークの位置から 2 種類の波数の擾乱の平均伝播速度を求めたものを図 7 に示す。時間間隔 25 ごとの変位のずれより平均速度を求めて平面シートと円盤形シートのそれぞれについて表示している。局所一様近似による値 (22) は実線で示されている。図 7(a),(b),(c),(d) はそれぞれ図 3,4,5,6 の場合に対応している。図 7(a) は、擾乱の波長が大きくなく振幅も大きくないときに、局所一様近似が厚さの変化率の大きい  $r = r_0$  近くでも正しいことを示している。図 7(b) は図 7(a) の場合よりも振幅が大きい  $A = 0.5$  の場合であるが、遅い伝播速度の波数について  $r$  が  $r_0$  に近いごくわずかな領域で局所一様近似からのずれがみえている。図 7(c) は波長が 200 と相当大きい場合に対応するが、このとき伝播速度の大きい方の波数には局所一様近似からのずれがみられる。ただし、このずれは  $r$  が小さい範囲に限られている。一方で伝播速度の小さい波数はほぼ局所一様近似の場合と同じ速度であることが分かる。図 7(d) は図 7(c) で振幅を大きくした  $A = 0.5$  の場合であるが、伝播速度の大きい方の波数だけでなく伝播速度の小さい波数についても局所一様近似からのずれが見られるようになる。ただし、このずれは 10% 程度である。以上より、速度の位置依存性に関する局所一様近似からのずれは擾乱の波長が大きく  $r$  が小さく噴出口に近いところで見られるが、その大きさはあまり大きくないことが分かる。擾乱の周期が  $T = 25$  の場合と  $T = 200$  の場合を比べると  $r = r_0$  の近辺で 1 波長の間でのシートの厚さは  $T = 25$  では  $2/3$  になるが、 $T = 200$  では  $1/5$  になっている。このことは、非線形効果が顕著になるのは擾乱の 1 波長の間で厚さの変化が相当大きいような



場合に限られることを意味している。

## 4 まとめ

薄膜近似によって円盤形放射状シート上の波動の様子を調べた。モデル方程式を数値的に解くことで円盤形放射状シートにおける伝播速度に対する非線形効果を調べた。局所一様近似は広範囲のパラメータについてよい近似となっていることが分かったが、波長が長く振幅が大きいときに局所一様近似からのずれがみられた。また、振幅については円盤形シートでは非線形効果によって下流への伝播に従って振幅が増大する効果がみられた。これは速度の局所一様近似からのずれが小さい場合でも大きな効果となっていた。

今後の課題として、伝播速度が半径によって変化することによって円盤形放射状シートでは反対称モードが Cardioid という非軸対称な波面を形成することが知られている [1] が、ここでの計算を非軸対称な系に拡張し Cardioid の形成への非線形効果を調べる事がある。また粘性を含む薄膜近似の定式化 [7] を利用して粘性の効果を調べることも課題としてあげられる。

## 参考文献

- [1] Taylor, G.I., "The dynamics of thin sheets of fluid II. Waves on fluid sheet. III. Disintegration of fluid sheets", Proc.R.Soc.Lond.A, 253 (1959), pp. 296-321.
- [2] Clanet, C. "Life of a smooth liquid sheet," J.Fluid Mech, 462 (2002), pp. 307-340.
- [3] Lin, S.P. and Jiang, W.Y., "Absolute and convective instability of a radially expanding liquid sheet", Phys.Fluids, 15 (2003), pp. 1745-1754.
- [4] Kim I. and Sirignano W.A., "Three-dimensional wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets", J.Fluid Mech, 410 (2000), pp. 147-183.
- [5] Mehring, C. and Sirignano, W.A., "Nonlinear capillary waves on swirling, axisymmetric free liquid films", Int.J.Mult.Flow, 27 (2001), pp. 1707-1734.
- [6] 吉永, 小谷, "薄膜近似による環状液体シートの解析", 数理解析研究所講究録 1209, (2001), pp.28-37.
- [7] Yoshinaga, T. and Yoshida, T., "Nonlinear wave behavior of the sinuous mode on a free liquid sheet with variable surface tension and viscosity", J.Phys.Soc.Japan, 72 (2003), pp. 3113-3122.
- [8] H. B. Squire, "Investigation of the instability of moving liquid film" Brit.J.Appl.Mech.4 (1953), pp.167